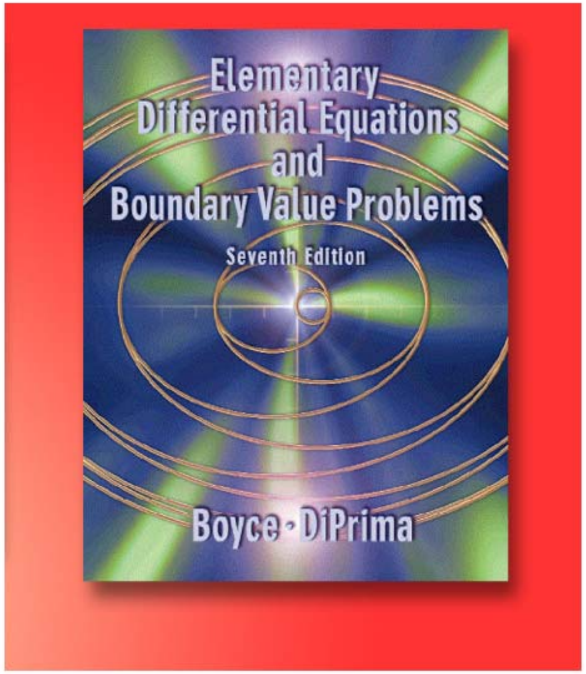

DİFERANSİYEL DENKLEMLER

1. GİRİŞ

1.1. Diferansiyel Denklemlerin Sınıflandırılması

<u>Tanım:</u> Bağımlı bir değişkeni ve bunun bir yada daha çok bağımsız değişkene göre türevlerini içeren bir denkleme <u>diferansiyel denklem</u> denir.

<u>Tanım:</u> Bağımlı değişkenin yalnız bir bağımsız değişkene göre türevlerini içeren dif. denkleme <u>adi (sıradan) diferansiyel</u> denklem denir.

<u>Tanım:</u> Bağımlı değişkenin birden çok bağımsız değişkene göre türevlerini içeren dif. denkleme <u>kısmi diferansiyel</u> denklem denir.

Örnekler:

a) $\dfrac{dy}{dt} + y = t^2 \qquad y = y(t)$

b) $\dfrac{d^2y}{dt^2} + t\dfrac{dy}{dt} = te^t$

c) $\left(\dfrac{d^2y}{dt^2}\right)^4 + \dfrac{d^2y}{dt^2} + t\dfrac{dy}{dt} = 0$

d) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0 \qquad u = u(x,y)$

e) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \qquad u = u(x,y,z)$

a, b, c adi dif. denklemler ve d, e kısmi dif. denklemlerdir.

Dif. Denklem Sistemleri:

<u>Tanım:</u> Birden fazla bilinmeyen fonksiyon ve birden fazla dif. denklem içeren sisteme <u>diferansiyel denklem sistemi</u> denir.

Örnek:

$$\frac{dx}{dt} = x + xy$$

$$\frac{dy}{dt} = y - xy$$

Tanım: Bir dif. denklemde en yüksek türevin mertebesine dif. denklemin **mertebesi** denir.

Örnek: 1) a mertebesi 1, b, c, d, e mertebesi 2 olan dif. denklemlerdir.

2) $$y''' + ty' + y = 0$$
dif. denklemin mertebesi üçtür.

n. mertebeden en genel adi dif. denklem

$$F(t, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (1)$$

şeklinde yazılır. (1) denkleminde t bağımsız değişken, y bağımlı değişkendir.

Verilen bir dif. denklemin en yüksek mertebesine göre

$$y^{(n)} = f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad (2)$$

şeklinde çözülebildiğini düşünelim. Biz bu derste (2) şeklindeki dif. denklemlerle çalışacağız. Aksi durumda (1) formundaki dif. denklemini, (2) formunda olan birkaç denklemle gösterebiliriz. Örneğin

$$y'^2 + ty' + 4y = 0$$

denklemini

$$y' = \frac{-t + \sqrt{t^2 - 16y}}{2} \quad \text{veya} \quad y' = \frac{-t - \sqrt{t^2 - 16y}}{2}$$

olarak gösterebiliriz.

Tanım: $\alpha < t < \beta$ aralığında $y^{(n)} = f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ adi dif. denkleminin **bir çözümü**, $\alpha < t < \beta$ aralığındaki her t için $\phi', \phi'', \dots, \phi^{(n)}$ türevleri var olan ve

$$\phi^{(n)}(t) = f(t, \phi(t), \phi'(t), \dots, \phi^{(n-1)}(t))$$

denklemini sağlayan ϕ fonksiyonudur.

Aksi belirtilmediği sürece genelde f fonksiyonu reel değerli düşünülerek ve $y = \phi(t)$ çözümlerinden de reel değerli olanlarla ilgilenilecek.

Örneğin $\phi_1(t) = t^3$

$$t^2 y'' - 4ty' + 6y = 0, \quad t > 0$$

dif. denkleminin bir çözümüdür.

$$y = t^3$$
$$y' = \frac{dy}{dt} = 3t^2$$
$$y'' = 6t$$

denklemde yerine yazılırsa

$$t^2(6t) - 4t(3t^2) + 6t^3 = 0$$

denklem sağlanır. Ayrıca $\phi_2(t) = t^2$ de bu dif. denklemin bir çözümüdür.

VARLIK VE TEKLİK

Lineer ve Lineer Olmayan Dif. Denklemler

Tanım: Eğer F, $y, y', \dots, y^{(n)}$ bağımlı değişkenlerine göre lineer ise

$$F(t, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

adi dif. denklemine lineer denir.

Buna göre n. mertebeden genel lineer dif. denklem

$$a_0(t)\, y^{(n)} + a_1(t)\, y^{(n-1)} + \dots + a_n(t)\, y = g(t) \qquad (3)$$

formundadır. (3) formunda olmayan dif. denklemlere lineer olmayan dif. denklemler denir.

Örneğin a, b lineer dif. denklem, c lineer olmayan dif. denklemdir.

Doğrultu Alanı:

Dif. denklemlerin ve çözümlerinin geometrik yorumları hakkında bir fikir sahibi olmada birinci mertebeden

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) \qquad (4)$$

dif. denklemi yardımcı olacaktır.